実ネットワークの大局的性質を再現する創発モデル

矢吹 光佑 [1]，矢吹 太朗 [2]
[1] 東京大学大学院情報理工学系研究科 (yabuki@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp)
[2] 青山学院大学理工学部 (yabuki@it.aoyama.ac.jp)

概要: スケールフリーなネットワークの生成モデルを提案する．このようなモデルとしては Barabási-Albert モデルがよく知られているが，このモデルでノード数の多い現実のネットワークを再現しようとすると，クラスタリング係数が非常に小さくなるという問題があった．この問題は，われわれのモデルによって解決することができる．また，われわれのモデルは創発的なつまり局所的な相互作用のみでネットワークを生成することができる．そのため，スケールフリーなネットワークを生成する際によく用いられる優先的選択を必要としない．
キーワード: 創発モデル，スモールワールド・ネットワーク，スケールフリー・ネットワーク

Emergent Model Reproducing the Grobal Features of Real Networks

YABUKI Kosuke[1]， YABUKI Taro[2]
[1] Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo (yabuki@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp)
[2] College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University (yabuki@it.aoyama.ac.jp)

Abstract: Scale-free network generation model is proposed. Barabási-Albert model is well-known to generate scale-free networks. That model, however, has trouble reproducing large real networks, because the clustering coefficients of networks generated by that are too small. This problem is settled by our model. In addition, our model is an emergent one, i.e., only local interactions are needed to generate networks. Thus, it does not require the preferential attachment that is usually required to generate scale-free networks.
Keywords: emergent model, small-world networks, scale-free networks

1 はじめに

複雑系のシステムはネットワークとしてみると理解できることが期待されている [2]．現実のネットワークを離れてネットワークを抽象的に理解するためには，モデルが必要である．では，モデルの善し悪しはどのように判断したらよいだろうか．対象の実ネットワークをそのまま再現するようなものでは意味がない．ここでは，対象の実ネットワークと統計的指標が同じになるようなネットワークを生成できるモデルをよいモデルと考える．

Erdös たちはランダム・グラフを用いて，系のサイズに対して任意のノード間の距離を非常に小さくできることを示した．Watts と Strongatz はクラスタに分かれた系を生成するモデルと，クラスタリングの度合いの指標クラスタリング係数を提案した．Barabási たちは現実のネットワークにはそれまでのモデルでは説明できないような多数のリンクを持つノードがあること（スケールフリー性）を発見し，それを再現するようなモデルを提案した．このようにネットワークについての理解は深まってきたように見えるが，Barabási たちのモデルではクラスタの存在を説明できない．つまり，彼らのモデルで生成されるネットワークはクラスタリング係数が小さいのである．

そのため，スケールフリー性を持ちながら，クラスタリング係数の大きなネットワークを生成するようなモデルが求められる．本論文ではそのようなモ

デルを提案する．

本論文の構成は次のとおりである．第 2 章ではよく知られた統計的指標をまとめる．第 3 章では既存のネットワーク・モデルを概観する．第 4 章でわれわれのモデルを提案する．第 5 章では現実のネットワークの統計的指標をモデルを用いて再現することを試みる．第 6 章では第 5 章の結果について考察し，第 7 章で本論文をまとめる．

2　ネットワークに関する統計的指標

ネットワークはその表現であるグラフ $G = (V, E)$ を与えることで一意に決まる．ここで V は頂点の集合，E は辺の集合である．

ネットワークに関する統計的指標には次のようなものがある．

- ノード数 ($N = |V|$)
- リンク数の分布
- ノード間最短距離の平均 (ℓ)
- クラスタリング係数 (C)
- スペクトル密度

リンク数の分布は，リンクを k 本持つノードの割合 $P(k)$ で定義される．分布がよく知られた形になる場合には，さらに詳細な指標を用いることができる．たとえば，後述のランダム・グラフにおいて，分布はポアソン分布となるが，その際にはリンク数の平均 $\langle k\rangle = \sum kP(k)$ が分布の典型的なスケールになる．分布が巾乗則 ($P(k) \propto k^{-\gamma}$) になる場合には，その巾 γ もネットワークの指標となる．

ただし，$P(k)$ をそのまま両対数プロットして直線をフィットさせると，点の少ない領域の影響が非常に大きくなる．そのため，対数軸上で区間を等分割し，その区間ごとの頻度を計算するのがふつうである (logarithmic binning)．ただし，この場合には等分割の方法などによって γ は変化する．つまり，γ は明確に定義できる指標ではない．本論文では，全体を $[1.2(1 + \log_2 N)]$ 分割し，さらに全体の 2% 以上の点を含む bin のみを用いて直線をフィットさせている．

ノード間最短距離の平均 ℓ の計算量は，疎グラフの全点間の最短経路を求める Johnson のアルゴリズムを用いるならば $O(N^2 \log N + N|E|)$ となるが [6]，この計算量は小さくない．また，グラフが連結でないと ℓ は定義されないが，その場合には最大のクラスタに属するノード間の最短距離の平均ということにする．

クラスタリング係数 C の定義は次のとおりである [9]．

$$C = \frac{1}{N}\sum \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}. \tag{1}$$

ここで k_i は i 番目のノードが持つリンクの数，E_i は i 番目のノードにつながっているノード同士のリンクの数である．C はネットワークのクラスタリングの度合いを表す指標であり，大きい C はよくクラスタリングされていることを示す．

スペクトル密度の定義は次のとおりである [1]．

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_j). \tag{2}$$

ここで λ_j はグラフの隣接行列の固有値である．この ρ はグラフのトポロジー的な特徴を表すことが知られているが [1]，本論文では用いない．

3　ネットワーク・モデル

3.1　ランダム・グラフ (RG)

ランダム・グラフ (RG) は任意の 2 ノードが確率 p でつながっているようなグラフである．このグラフはノード数 N と接続確率 p を与えれば生成できる．

RG の統計的指標は次のとおりである [1]．

$$\langle k\rangle = p(n-1) \simeq pn \quad \left(p\binom{N}{2} = N\langle k\rangle/2 \text{ より}\right), \tag{3}$$

$$\ell \sim \log N/\log\langle k\rangle \simeq \log N/\log pN \quad (\langle k\rangle^{\ell} \sim N \text{ より}), \tag{4}$$

$$C = p, \tag{5}$$

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \tag{6}$$

N が大きいとき，$P(k)$ はポアソン分布 $\exp(-\langle k\rangle)\langle k\rangle^k/k!$ に近づく．

3.2　スケールフリー・ランダム・グラフ (SFR)

スケールフリー・ランダム・グラフ (SFR) は $P(k)$ が典型的なスケールを持たないようなグラフである．数種類のモデルが提案されているが，ここでは次のようにして $P(k)$ が巾乗則の分布になるようなグラフを生成する [8]（本論文と異なり，文献 [8] では分布関数にカット・オフが導入されている）．

このグラフはノード数 N と巾 γ を与えれば次のように生成できる．

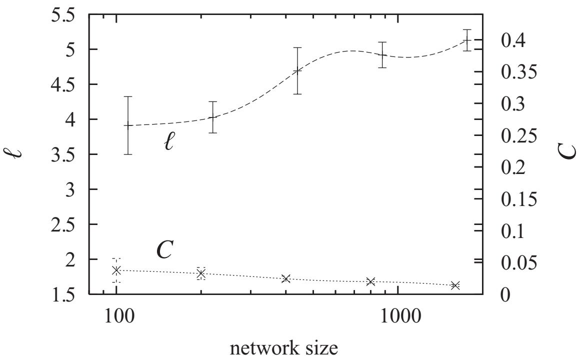

図 1　$\gamma = 2$ の SFR で生成したネットワークの ℓ と C（10 個のグラフの平均値，エラー・バーは標準偏差.）

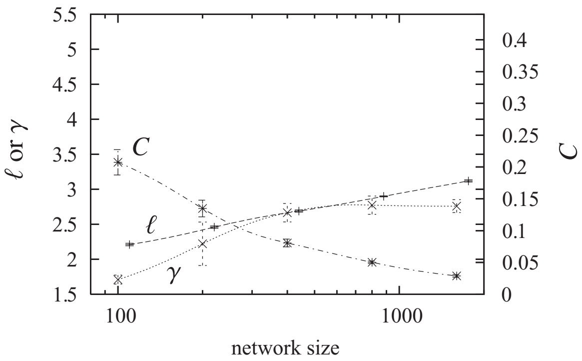

図 2　$m_0 = m = 5$ の BA で生成したネットワークの ℓ と C，γ（10 個のグラフの平均値，エラー・バーは標準偏差.）

1. $P(k) = Ck^{-\gamma}$ に従って N 個の乱数 k_i を生成する（ただし $C = 1/\sum_{k=1}^{N} k^{-\gamma}$）.
2. $\sum k_i$ が奇数だったら 1 に戻ってやり直す.
3. 1 から N までの整数を 2 つ (m, n)，一様に生成する.
4. $k_m \neq 0 \wedge k_n \neq 0$ ならば m 番目のノードと n 番目のノードを結び，k_m と k_n を 1 減らす[*1].
5. すべての k_i が 0 ならば終了．そうでなければ 4 に戻る.

このネットワークに関する統計的指標は図 1のようになる．ℓ は N とともに増加，C は $\log N$ の一次関数で減少する傾向がある.

3.3　Watts-Strongatz モデル (WS)

Watts-Strongatz モデル (WS) は格子のようなグラフと RG を補間するようなグラフである [9].

このグラフはノード数 N とリンク数 K（偶数），確率 p を与えれば生成できる．まず，最も近い $K/2$ 個のノードがつながっているような円環グラフを生成し，各ノードの各リンクについて，そのリンク先を確率 p でランダムに変更すればよい.

このネットワークに関する統計的指標には次のような性質があることが知られている [9, 4].

- C はランダム・グラフと比べて大きな値で，N に依らない.
- N が大きいところでは，ℓ は $logN$ の一次関数で増加する.
- ℓ, C ともに p が増加すると減少する．ただし，ℓ の減少のほうが速い.
- $P(k)$ は $\langle k \rangle = K$ 付近にピークを持ち，k が大きくなると指数的に減少する.

3.4　Barabási-Albert モデル (BA)

Barabási-Albert モデル (BA) はスケールフリーなネットワークの起源を説明するために考案されたモデルである [3]．このモデルは，成長と優先的選択という 2 つのルールからなり，生成されるネットワークの $P(k)$ は巾乗則になる.

成長　まずサイズ m_0 の小さいコアを作り，ノードを追加していくことでネットワークを生成する.

優先的選択　新たに追加されるノードは，既存のノード m 個との間にリンクを張る．ただし，m 個のノードはそのリンク数 k に比例した確率で選択される．つまり，i 番目のノードが選択される確率は $k_i/\sum k_j$ である.

よって，BA はノード数 N とコア・サイズ m_0，新しいノードのリンク数 m を与えれば生成できる.

このネットワークに関する統計的指標の理論的解析は文献 [1] などで与えられているが，実際に生成して調べると図 2のようになる.

4　提案するモデル (YB)

本論文では新しいネットワーク生成モデル (YB) を提案する.

[*1] この方法はすでにリンクが張られているかどうかを検査しない．そのため，生成されるグラフは厳密には $P(k)$ に従わない．検査を導入するとこのアルゴリズムは停止しなくなる可能性があるため，この問題を回避するには根本的な修正が必要になる.

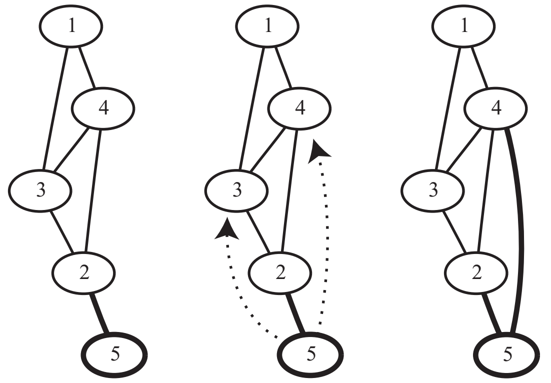

図 3 YB にノードを追加する方法．（左）まずランダムにノードを選び (2)，そこに新しいノード (5) を接続する．（中央）新しいノード (5) に追加するリンクは，そのノード (5) から 2 ステップで行けるところにあるノード (3,4) から選ぶ．（右）選んだノード (4) と新しいノード (5) を接続する．

4.1 YB の生成法

YB の生成方法は次のとおりである（図 3も参照）．このネットワークはノード数 N とコア・サイズ m_0，リンク数 m をを与えると生成できる．

1. サイズ m_0 のコアを作る．
2. ノード数が N になったら終了．
3. ランダムにノード A（図では 2）を選び，A につながるノード B（図では 5）を新たに 1 つ生成する．
4. B にリンクを追加する．ただし，その接続先はすでに B につながっているノード（はじめは A のみ）とつながっているノード（図では 3 と 4）から選ぶ（図では 4 を選んだ）．
5. B が持つリンクが m 本になったら 2 に戻る．

第 4 段階においては 2 ステップで行けるノードに新たなリンクを張るが，そのうちの特定のノードが選択される確率は，そのノードへの経路の数に比例するようにする．そのためには，すでに接続されているノード（1 ステップで行ける）に接続されているノード（2 ステップで行ける）のリストを単純に連結し，その中からノードを等確率で選択すればよい．また，ノードが平等に選択されるようにするためには，リストを連結する際に，重複を取り除けばよい．いずれにしても，このような変更によって YB の定性的な性質は変化しない．

4.2 YB の特徴・他モデルとの相違点

計算機シミュレーションによって，YB は次のような性質を持つことを確認できる．

スモールワールド性 1　ℓ が N に比べて小さい．また，ℓ の増加は N の増加に比べて遅い．これは RG, SFR, WS, BA に共通の性質である．

スモールワールド性 2　C が大きい，つまりクラスタリングの度合いが高い．これは WS が持つ性質である．N が増加すると C は減少するが，その変化は $\log N$ の緩やかな一次関数であり，BA の場合に比べて遅い．

スケールフリー性　$P(k)$ が巾乗則に従う (図 4)．これは SFR と BA が持つ性質である．

創発性　ネットワークの生成において，局所的な情報しか利用しない．上述の 4 つのモデルはこの性質を持っていない．

創発的でないモデルは，全体的な視点なしには生成することができない．他のモデルは次のような理由で創発的ではない．

RG　任意の 2 ノードを確率 p で接続するためには，まず 2 つのノードを選択できなければならない．そのためにはすべてのノードを知っていなければならない．

WS　リンク先はランダムに変更されるが，すべてのノードを知っていなければ新しい接続先を選べない．

SFR, BA　すべてのノードのリンク数をつねに知っていなければ，新たな接続先を選択できない．

上述の YB の生成法では，新たにノードを追加する際，まずランダムにノードを選び，そこに新しいノードを接続していたが，これと等価な操作を全体的な視点なしに実現することは可能である．そのためには，各ノードに確率 $1/N$ で新しいノードを付加するようにすればよい．

5 モデルによる実ネットワークの再現

現実に存在するネットワークの統計的指標を，モデルから生成したネットワークで再現することを試みる．対象とする実ネットワークは表 1のとおりである．

ネットワークを生成する際，そのノード数 N は目標の実ネットワークと同じにする．それ以外の

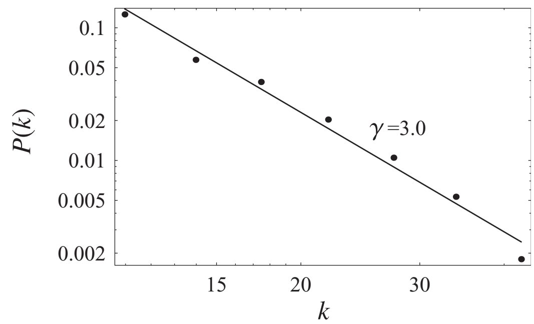

図 4　$N = 1000, m_0 = m = 5$ の YB で生成したネットワークの $P(k)$．巾乗則に従っていることがわかる．

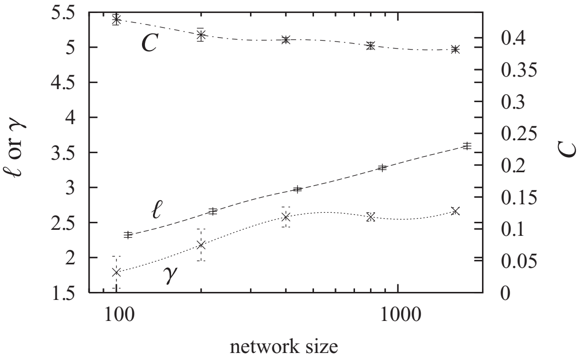

図 5　$m_0 = m = 5$ の YB で生成したネットワークの ℓ と C，γ（10 個のグラフの平均値，エラー・バーは標準偏差.）

パラメータも，統計的指標から容易に制限できるならばその値に固定する．たとえば，ランダム・グラフ (RG) においては，任意のノード間にリンクを張る確率 p がパラメータであるが，目標とする統計的指標の一つである平均リンク数 $\langle k\rangle$ から容易に制限できる．つまり，$pN(N-1)/2 = N\langle k\rangle/2$ でなければならない．よって，RG のパラメータ p は $p = \langle k\rangle/(n-1)$ と一意に定まる．これは N と $\langle k\rangle$ をあわせることの優先順位を高くすることを意味するが，これは制約がわかりやすいだけのためである．

5.1　ランダム・グラフ (RG)

ランダム・グラフ (RG) のパラメータはノード数 N と接続確率 p である（3.1節）．N は目標のネットワークの値を用いる．上述のように p は目標のネットワークのノードあたりの平均リンク数 $\langle k\rangle$ から一意に決まる．よって，RG には自由なパラメータはない．

表 1　再現を試みる実ネットワーク（指定のないものは [1] より）

	N	γ	$\langle k\rangle$	ℓ	C
Ythan food web (Yt)	134	1.05	8.7	2.43	0.22
Silwood food web (Si)	154	1.13	4.75	3.4	0.15
S. cereviciae (Sc)[7]	1869	2.4	2.36	6.81	0.067
Yeast protein (Ye)[5]	2361	1.40	5.86	4.38	0.13
LANL co-auth. (La)	52909		9.7	5.9	0.43
Math. co-auth. (Ma)	70975	2.5	3.9	9.5	0.59

5.2　スケールフリー・ランダム・グラフ (SFR)

スケールフリー・ランダム・グラフ (SFR) のパラメータはノード数 N と巾乗則の係数 γ であるが (3.2節)，どちらも目標のネットワークの値を用いる．文献 [8] で用いられているようなカット・オフなどを導入しているならば（つまり分布関数にもう一つパラメータがあれば），$\langle k\rangle = \sum kP(k)$ の関係から平均リンク数もあわせることができるが，ここではモデルを単純に保つため採用しない．よって，SFR には自由なパラメータはない．

先述のように γ はよく定義された量ではないため，目標のネットワークの γ を SFR で用いても，その γ が再現されるわけではないことに注意してほしい．

5.3　Watts-Strongatz モデル (WS)

Watts-Strongatz モデル (WS) のパラメータはノード数 N と初期状態のノードが持つリンク数 k，リンクの張り替え確率 p である（3.3節）．N は目標のネットワークの値を用いる．k は目標のネットワークの $\langle k\rangle$ にもっとも近い偶数とする．以上から，p のみが WS の自由なパラメータとなる．

WS はスケールフリーにはならないため，実ネットワークの統計的指標のうち，再現できる可能性があるのは ℓ と C である．目標のネットワークのものを ℓ_G, C_G，WS で生成したネットワークのものを ℓ, C と書くことにし，再現のよさを，

$$\text{RMS error} = \sqrt{w_\ell\left(\frac{\ell-\ell_G}{\ell_G}\right)^2 + w_C\left(\frac{C-C_G}{C_G}\right)^2} \quad (7)$$

のような関数で表す．ここで w は適当な重みである（ここでは $w_\ell = 1, w_C = 0.1$ とする）．この関数の最小値を与える p を求めればよい．

例として，Yt を再現する場合の RMS error を図6に示す．RMS error は複雑な形にはならないため，

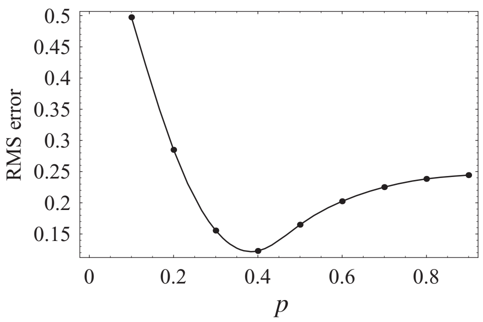

図 6　Ythan food web を WS で再現する場合の RMS error

簡単に最小化できる．

5.4　Barabási-Albert モデル (BA)，YB モデル

Barabási-Albert モデル (BA)・YB モデルのパラメータは，ノード数 N とコア・サイズ m_0，成長時に新しいノードが持つリンクの数 m である (3.4,4.1節)．N は目標のネットワークの値を用いる．生成されるネットワークは $\langle k \rangle \simeq 2m$ となるため，逆に目標のネットワークの $\langle k \rangle$ からモデルの m を制限することができる．ここでは $\langle k \rangle/2$ に最も近い整数を採用するが，この値が 2 未満の場合は 2 とする．よって，BA・YB の自由なパラメータは m_0 となる．このパラメータを変化させて式 (7) を最小化する．

BA・YB ともにコアは完全グラフとする．

5.5　結果

モデルを使って生成したネットワークの統計的指標を表 2に示す．理論的な期待値が知られている場合でも，実際に生成したネットワークの指標を求めている．

5.6　ネットワーク・サイズと C が大きい場合

サイズが大きいネットワークは統計的指標の計算量が膨大になる．そのため，ここではサイズが小さい場合の傾向を外押する．対象にする実ネットワークは LANL co-authorship (La) と Math. co-authorship (Ma) である（表 1）．

まず，BA と YB それぞれについて，ネットワーク・サイズ N を 2000 程度に限定してクラスタリング係数 C を調べる．

BA の場合，$C \sim N^{-0.75}$ となることが知られているため [1], この関数をフィットさせると, La についてはC $\simeq 6.70N^{-0.75}$, Ma についてはC $\simeq 5.15N^{-0.75}$ となる（図 7,8）．

表 2　モデルを使って再現した統計的指標（誤差が 20% 以下のものを枠で囲っている）

		Yt	Si	Sc	Ye
real	N	134	154	1869	2361
	γ	1.05	1.13	2.4	1.40
	$\langle k \rangle$	8.7	4.75	2.36	5.86
	ℓ	2.43	3.4	6.81	4.38
	C	0.22	0.15	0.0672	0.130
RG	ℓ	$\boxed{2.49}$	$\boxed{3.39}$	8.36	$\boxed{4.61}$
	C	0.062	0.032	8.64×10^{-4}	2.62×10^{-3}
SFR	γ	0.803	0.90	1.61	
	$\langle k \rangle$	13	11.5	1.83	
	ℓ	$\boxed{2.63}$	$\boxed{2.8}$	4.70	
	C	$\boxed{0.24}$	0.21	0.0257	
WS	$\langle k \rangle$	8	4	4	6
	p	0.35	0.38	0.5	0.42
	ℓ	$\boxed{2.71}$	4.10	$\boxed{6.08}$	$\boxed{4.92}$
	C	$\boxed{0.20}$	$\boxed{0.20}$	$\boxed{0.0689}$	$\boxed{0.121}$
BA	m_0	12	6	13	33
	γ	1.58	2.13	$\boxed{2.61}$	2.71
	ℓ	$\boxed{2.42}$	$\boxed{3.2}$	3.96	3.25
	C	$\boxed{0.22}$	$\boxed{0.14}$	0.0504	0.0980
YB	m_0	12	6	6	12
	γ	1.70	1.97	$\boxed{2.28}$	2.46
	ℓ	$\boxed{2.58}$	$\boxed{4.13}$	$\boxed{6.84}$	$\boxed{4.88}$
	C	0.48	0.69	0.697	0.569

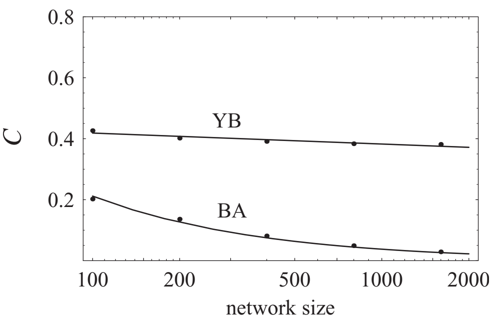

図 7　LANL co-authorship の C を見積もる準備．各点は $m_0 = m = 5$ で生成した 5 個のネットワークの平均である．

YB の場合，$\log N$ の一次関数だと仮定してフィットさせると，La については $C \simeq 0.491 - 0.0360 \log N$，Ma については $C \simeq 0.704 - 0.00298 \log N$ となる（図 7,8）．

こうして得られた傾向を実際のサイズまで外挿すると表 3のようになる．

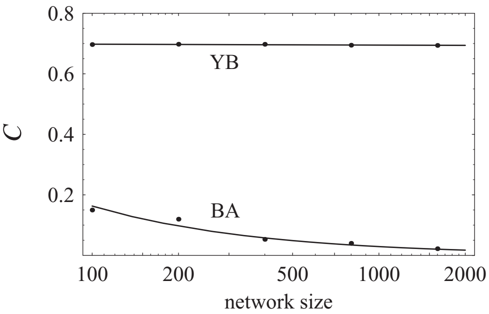

図 8　Math. co-authorship の C を見積もる準備．各点は $m_0 = 5, m = 2$ で生成した 5 個のネットワークの平均である．

表 3　外挿による C の見積もり

	N	C	C_{BA}	C_{YB}
LANL co-auth. (La)	52909	0.43	1.9×10^{-3}	0.32
Math. co-auth. (Ma)	70975	0.59	1.2×10^{-3}	0.69

6　考察

表 2をみるとわかるように，Watts-Strongatz モデル (WS) は現実のネットワークの ℓ と C をよく再現できる．これは WS の ℓ と C がパラメータに対して異なる振る舞いをするため（どちらも p が増加すると減少するが，C の減少のほうが ℓ の減少よりも遅い），p をうまく調整することで，両方の指標を実ネットワークにあわせることができるからである．しかし，WS の $P(k)$ は巾乗則にはならないため，それが本質的に重要な場面では使えないだろう．

Barabási-Albert モデル (BA) は実ネットワークのサイズが小さい場合には，統計的指標をよく再現できる．しかしながら，表 3で見たように，サイズが大きくなるとクラスタリング係数 C が急速に小さくなるため，大きなネットワークのクラスタリングを説明できない．

YB モデルはこの問題を解決できる．C をさらに実ネットワークに近づけたければ，YB の生成法（4.1節）の第 4 ステップの後で，リンクをランダムにつなぎ変えるような操作を導入すればよい．これによって，C は小さくなるため，実ネットワークにより近くすることができる．しかし，この操作は局所的な情報のみでは行えないため，これを採用するとモデルは創発的ではなくなる．

Barabási らは，スケールフリーなネットワークを生成するためには，成長と優先的選択が必須だと主張している [2, 1]．しかしながら，本論文で提案した YB は優先的選択を用いていないにもかかわらず，スケールフリーなネットワークを生成する．よって，少なくとも優先的選択は必須ではないことが明確に示された．

7　おわりに・今後の課題

スケールフリーでクラスタリング係数の大きいネットワークを生成するためのモデルを提案した．実際，既存のモデルでは同時に再現することができなかったこの 2 つの性質を持つことを，計算機シミュレーションで示した．

このモデルは局所的な相互作用のみでネットワークを生成する，創発的なモデルである．これはネットワークの統計的指標と異なり，定量的にとらえることが難しい概念であるが，このような考え方は現実に存在するネットワークの起源を理解する際に役立つだろう．

本論文ではネットワーク・サイズが小さいところでシミュレートし，結果を外挿するという手法を採用したが，理論的な解析を進めることで，サイズが非常に大きくなった場合の振る舞いを高い精度で予測できるようにする必要があるだろう．

ここで提案したモデルには自由度が少ないという問題もある．現実のネットワークをさらに精度よく再現できるようにするためには，可変のパラメータをいくつか持った，豊かなモデルを作る必要があるだろう．

参考文献

[1] R. Albert and A.-L. Barabśi. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, pp. 47–97, 2002.

[2] A.-L. Barabási. *Linked: The New Science of Networks*. Perseus Publishing, Massachusetts, 2002. 青木薫訳. 新ネットワーク思考. NHK 出版, 2002.

[3] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, Vol. 286, pp. 509–512, 1999.

[4] A. Barrat and M. Weigt. On the properties of small-world network models. *Eur. Phys. J. B*,

Vol. 13, pp. 547–560, 2000.

[5] D. Bu, et al. Topological structure analysis of the protein-protein interaction network in budding yeast. *Nucleic Acids Research*, Vol. 31, No. 9, pp. 2443–2450, 2003. `http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data/bio/Yeast/Yeast.htm`.

[6] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest, editors. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 1990. 浅野哲夫ほか訳. アルゴリズムイントロダクション第２巻. 近代科学社, 1995.

[7] H. Jeong, S. Mason, A.-L. Balabási, and Z.N. Oltvai. Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, Vol. 411, pp. 41–42, May 2001. `http://www.nd.edu/˜networks/database/`.

[8] M.E.J. Newman, S.H. Strongatz, and D.J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, Vol. 64, p. 026118, 2001.

[9] D.J. Watts and S.H. Strongatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, Vol. 393, pp. 440–442, 1998.